Introducción a la Teoría de Categorías

Pares Ordenados

José Ramírez Gómez
Mentor: Mateo Torres Ruiz

Verano 2024

Resumen

El objetivo de este proyecto es explorar las definiciones básicas de la teoría de categorías y desarrollar ejemplos que ayuden a comprender los distintos conceptos de ésta. Éstos tendrán un énfasis en la categoría de conjuntos y funciones, con ejemplos que sirvan para guiar la exploración así como para trabajar en un entorno que sea familiar al mayor número de personas posible.

1. Introducción

El objetivo de estas notas es dar una breve introducción a los conceptos más básicos de la teoría de categorías. No son, en forma alguna, un tratamiento extenso del tema, sino que buscan desarrollar ejemplos básicos, tomados de la teoría de conjuntos, mucho más común en los programas de estudios de estudiantes de matemáticas, ciencias de la computación y ramas afines en América Latina. El principal prerrequisito para leer estas notas es familiaridad con los conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Con este fin, añadimos un apéndice que contiene un compendio de las definiciones y resultados necesarios para seguir el desarrollo de las notas.

Es ya un lugar común el decir que la teoría de categorías puede verse como una "teoría general de las funciones", donde el énfasis recae en la forma en la que distintos objetos matemáticos pueden relacionarse con otros y consigo mismos. Estas "funciones" (que llamaremos *morfismos* y serán, de hecho, no necesariamente funciones –más sobre esto después–) no son consideradas punto-a-punto, como suele ser el caso en una visión conjuntista, sino que son vistas como "flechas abstractas". Lo que se busca con resaltar la forma en la que se pueden relacionar distintos objetos es el hacer transparente ciertos aspectos estructurales de estos y su relación con objetos que pudieran parecer distantes (e.g., ¿cómo podemos comparar al álgebra de Heyting con, digamos, la lógica intuicionista?).

Intuitivamente, podemos ver a las categorías como colecciones de objetos y flechas que cumplen con ciertas propiedades: las flechas van de un objeto a otro, todo objeto tiene una flecha que va a sí mismo, y dadas dos flechas cualesquiera, estas pueden componerse si se corresponden en algún objeto común. Con estas propiedades podemos capturar diversos objetos matemáticos: matrices y operaciones entre estas, espacios probabilísticos y variables aleatorias, espacios topológicos y funciones continuas, etc. En estas notas nos concentraremos en cómo podemos usar a las categorías y conceptos derivados, para abstraer objetos de la teoría de conjuntos.

1.1. Definiciones básicas

Ahora hacemos formal la idea del párrafo anterior.

Definicion 1 (Categoría)**.** Una categoría $\mathcal{C}$ está compuesta de:

- Una colección de objetos, $Obj(\mathcal{C})$, que denotaremos con las letras A, B, C, etc.
- Una colección de flechas o morfismos, $Mor(\mathcal{C})$, que denotaremos con las letras f, g, h, etc.
- Dos mapeos, $dom, cod : Mor(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, que asignan a cada flecha f su dominio $dom(f)$ y codominio $cod(f)$. Para una flecha f con dominio A y codominio B escribiremos $f : A \to B$. Y para cada par de objetos A, B definimos el conjunto
$$\mathcal{C}(A, B) := \{f \in Mor(\mathcal{C}) \mid f : A \to B\}$$
al que llamaremos *Hom-set* y también escribiremos como $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ o simplemente $Hom(A, B)$ cuando no exista ambigüedad sobre la categoría en la que están definidos los morfismos.
- Para cualquier terna de objetos A, B, C, la composición de morfismos,
$$C_{A,B,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C).$$
Dados $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, escribiremos $g \circ f$ para denotar $\mathcal{C}_{A,B,C}(f, g)$.
- Para cada objeto A, una flecha identidad, $\mathbf{1}_A : A \to A$.

Tales que se satisfagan los siguientes axiomas:

- Asociatividad: para cualesquiera morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, se cumple que
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
- Identidades: para cualquier morfismo $f : A \to B$ se cumple que
$$f \circ \mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B \circ f.$$

¡Las categorías aparecen en todos lados!, nuestro primer ejemplo es uno de los más populares: los monoides vistos como categorías. Recordemos antes la definición algebráica de estos.

Definicion 2 (Monoide)**.** Un monoide es un conjunto M junto a una operación $*$ en M que satisface los siguientes axiomas:

- Asociatividad: $a * (b * c) = (a * b) * c$ para todo $a, b, c \in M$.
- Existencia de la identidad: para cada $a \in M$ existe un elemento $e \in M$ tal que $a * e = e * a = a$.

En efecto, podemos ver a todo monoide como una categoría, donde $Obj(M)$ se corresponde con el conjunto unitario $\{\cdot_M\}$, i.e., nuestra categoría consta de un único objeto. Vemos además que $Hom(\cdot_M, \cdot_M) = M$, es decir, los morfismos de $\mathcal{M}$ son exactamente los elementos del conjunto M. Finalmente, el morfismo identidad del único objeto de la categoría será, precisamente, e_M, el elemento neutro del monoide. Es inmediato ver que tanto los axiomas del monoide considerado, $\langle M, *, e\rangle$, como los de categoría, se cumplen.

Veamos ahora cómo es que podemos pensar en los conjuntos y sus funciones como categorías.

Definicion 3 (Categoría de conjuntos, Set)**.** La categoría de conjuntos y funciones, conocida como Set, consiste de conjuntos como objetos y funciones como morfismos entre estos. Esto es, si A y B son conjuntos, el morfismo $f : A \longrightarrow B$ es una correspondencia entre dichos conjuntos que asigna a cada elemento a de A un único elemento b en B:

$$Hom_{\mathrm{Set}}(A, B) := \left\{f \subseteq A \times B \mid f \text{ es función}\right\}$$

La composición en esta categoría se corresponde con la composición conjuntista de funciones, i.e., dadas funciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $g \circ f : A \longrightarrow C$ es un mapeo $x \mapsto g(f(x))$; para cada conjunto A, el morfismo identidad, $\mathbf{1}_A$, se corresponde con la función identidad usual, i.e., $a \mapsto a$ para todo $a \in A$.

Es un ejercicio básico de la teoría de conjuntos el mostrar que la definición de Set cumple con los axiomas de categorías.

Ejercicio 1. *Mostrar que la composición de funciones es asociativa y que dados cualquiera conjuntos A, B, sus funciones identidad fungen como elementos neutros para cualquier función $f : A \longrightarrow B$.*

Una observación trivial mediante la cual podemos "duplicar" muchos de los resultados de la teoría de categorías es el hecho de que el "voltear" la dirección de los morfismos de una categoría $\mathcal{C}$ cualquiera no invalida ninguno de los axiomas de categoría. Esta es una propiedad que explotaremos en la siguiente subsección.

Definicion 4 (Categoría opuesta)**.** Dada una categoría $\mathcal{C}$ cualquiera, la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ es dada por los mismos objetos de $\mathcal{C}$ y $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$. Tanto la composición como las identidades de $\mathcal{C}$ son las mismas en $\mathcal{C}^{op}$.

1.2. Límites y colímites

En esta sección introducimos un número de construcciones básicas de la teoría de categorías, conocidas como *límites* y *colímites*, mediante las cuales podemos capturar objetos de distintas áreas que nos son familiares. Aunque algunas de estas pudieran parecer suficientemente sencillas como para ameritar un tratamiento aparte, logran abstraer la forma general de la que son instancias múltiples objetos de diversas áreas de las matemáticas. Para ejemplificar cada una de estas construcciones, nos enfocaremos qué objetos de la teoría de conjuntos (es decir, en Set) son capturados.

Definicion 5 (Objeto terminal)**.** Dada una categoría $\mathcal{C}$ cualquiera, un objeto T es *terminal* si para cada objeto A en $\mathcal{C}$, existe una única flecha de A en T, $\tau_A : A \longrightarrow T$.

El objeto terminal es también denotado por 1, justificado por el hecho de que en muchas categorías, este corresponde con un conjunto que tiene un único elemento.

Ejemplo 6. En Set, el objeto terminal es dado por el conjunto unitario, $\{*\}$. En efecto, dado un conjunto A cualquiera, hay una única función $f : A \longrightarrow \{*\}$, la función que manda a cada elemento de A al único elemento del conjunto unitario, $a \mapsto *$.

Definimos ahora una de las estructuras más ubicuas.

Definicion 7 (Productos)**.** Dados dos objetos A, B en una categoría $\mathcal{C}$ cualquiera, el producto de A y B es un objeto $A \times B$ en $\mathcal{C}$ junto con una pareja de morfismos $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$, $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$, que llamaremos proyecciones, tal que para todo triplete $(C, f : C \longrightarrow A, g : C \longrightarrow B)$ con C, f y g un objeto y morfismos arbitrarios de $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : C \longrightarrow A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\langle f,g\rangle"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Vale la pena detenernos un momento en la última parte de la definición que hemos dado. El que el diagrama dado *conmute* establece, implícitamente, una serie de ecuaciones que caracterizan la unicidad del morfismo representado con una línea punteada. Explícitamente, el hecho de que $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ y $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$. El razonamiento diagramal es una de las herramientas más usadas en la teoría de categorías básica, donde lo que se busca capturar es la existencia de morfismos que den lugar a ecuaciones entre estos y, en ocasiones, su unicidad.

Observacion 8. Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene *productos binarios* cuando para cualesquiera par de objetos A, B, su producto existe en $\mathcal{C}$.

Veamos ahora a qué es a lo que corresponden los productos en la categoría Set. Para esto, recordemos antes que el *producto cartesiano* de dos conjuntos X, Y cualesquiera corresponde con el conjunto de sus pares ordenados:

$$X \times Y := \big\{(x, y) \mid x \in X \text{ y } y \in Y\big\}$$

Ejemplo 9. Como el lector se habrá adelantado, los productos categóricos de Set se corresponden con el producto cartesiano de conjuntos. Haciendo esto explícito, dados cualesquiera dos conjuntos A, B, podemos formar su producto cartesiano $A \times B$, y sus proyecciones corresponden exactamente con los morfismos proyectivos. Para definir el morfismo único $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ basta con tomar $\langle f, g\rangle(c) = (f(c), g(c))$ para cualquier $c \in C$. Es inmediato ver que las ecuaciones del diagrama conmutativo que define al producto se cumplen bajo estas definiciones.

Definicion 10 (Ecualizadores)**.** Sean $f, g : A \to B$ un par de morfismos paralelos en una categoría $\mathcal{C}$. El ecualizador de (f, g) es un morfismo $e : E \to A$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
D \arrow[u, dashed, "\hat{h}"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nuevamente, podemos preguntarnos a qué corresponde de manera explícita el diagrama de la definición dada. Siguiendo la composición de los morfismos, el ecualizador e debe cumplir con $f \circ e = g \circ e$ tal que para cualquier otro morfismo $h : D \to A$ que mantenga la misma relación con f y g (i.e., $f \circ h = g \circ h$), exista un único morfismo $\hat{h} : D \to E$ tal que $h = e \circ \hat{h}$.

Ejemplo 11. En Set el ecualizador de dos funciones $f, g : A \to B$ es dado por la inclusión,

$$\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A$$

Esto nos permite ver a subconjuntos determinados por una propiedad ecuacional como ecualizadores. Por ejemplo, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiendas como $f(a, b) = a^2 + b^2$ y $g(a, b) = 1$, tenemos que el ecualizador se corresponde exactamente con el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que determina a los círculos unitarios.

Consideremos ahora un último tipo de construcción.

Definicion 12 (Producto fibrado)**.** Consideremos un par de morfismos $f : A \to C, g : B \to C$ en una categoría $\mathcal{C}$. El producto fibrado de f a lo largo de g es un par de morfismos $p : D \to A, q : D \to B$ tales que hay un único morfismo $h : D' \to D$ desde cualquier otro objeto D' de $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\
& D \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Si bien esta construcción luce poco menos intuitiva, es, junto con todas las anteriores, una instancia de una construcción general: los *límites* categóricos consisten en diversas formas de diagramas conmutativos dentro de una categoría. Estos diagramas nos permiten empezar con objetos y morfismos que asumimos existen en nuestra categoría (o sabemos cómo pueden ser construidos), y obtener (construir) un nuevo objeto junto con morfismos que lo relacionen con los objetos originalmente considerados. Una construcción explícita de cada una de las construcciones anteriores como límite, así como la definición general de límite, puede encontrarse en [Lei16].

2. Functores

Los functores son fundamentales para el entendimiento de las estructuras que aparecen en la teoría de categorías. No solo permiten hacer traducciones coherentes entre categorías, sino que también establecen conexiones entre diferentes áreas del conocimiento matemático. Estudiar functores es abrir la puerta a un lenguaje universal que expande los horizontes del pensamiento matemático.

Intuitivamente, podemos ver un functor como una asignación que actúa de dos maneras entre categorías: primero, asigna a cada objeto en la categoría de origen un objeto en la categoría de destino, y segundo, asigna a cada morfismo en la categoría de origen un morfismo en la categoría de destino. Además, debe preservar ciertas propiedades importantes de las categorías: aplicar un functor a la composición de dos morfismos debe ser igual a aplicar el functor a cada morfismo y luego componerlos, y aplicar el functor a un morfismo identidad debe ser igual a la identidad del functor aplicado al objeto en cuestión.

Ahora hacemos formal la idea del párrafo anterior.

Definicion 13 (Functores)**.** Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ está dado por:

- Un mapeo de objetos, que asigna un objeto $F(A)$ en $\mathcal{D}$ a cada objeto A de $\mathcal{C}$.
- Un mapeo de flechas que asigna un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$ a cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ de tal forma que se preserven las identidades y composiciones, es decir: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

La definición formal de un functor resalta dos aspectos clave: el mapeo de objetos y el mapeo de morfismos. Preservar las identidades y composiciones asegura que la estructura categórica se mantenga intacta bajo la acción del functor.

Definition 14 (Categoría producto)**.** Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos categorías, la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es la categoría cuyos:

- Objetos son pares ordenados (c, d) con $c \in Obj(\mathcal{C})$ y $d \in Obj(\mathcal{D})$.
- Morfismos son pares ordenados $((f : c \to c'), (g : d \to d'))$.
- La composición de morfismos se define componente a componente, es decir, $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.

Ejemplo 15. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos binarios y sea $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ la categoría producto de $\mathcal{C}$ con ella misma. El functor producto $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se define como:

- Mapeo de objetos: $\times(C, D) := C \times D$

- Mapeo de flechas: $\times(f, f') := f \times f'$

Donde $C \times D$ es un producto binario de los objetos C, D y $f \times f'$ es el producto de f, f'.

Este ejemplo ilustra cómo los functores pueden establecer relaciones entre categorías. En este caso, el functor producto toma dos objetos y dos morfismos de la categoría original y los combina mediante el producto binario.

Ahora veremos un par de definiciones que resultan ser útiles para tratar algunas construcciones.

Los functores covariantes mantienen la dirección de los morfismos, lo que significa que respetan la estructura direccional de las flechas en la categoría.

Definicion 16 (Functor covariante)**.** Un functor F es covariante si el mapeo de morfismos preserva la dirección de estos, i.e., si $f : A \to B$ entonces $Ff : FA \to FB$.

Por otro lado, los functores contravariantes invierten la dirección de los morfismos, lo que puede ser útil en contextos donde se necesita considerar la estructura dual de una categoría.

Definicion 17 (Functor contravariante)**.** Un functor F es contravariante si el mapeo de morfismos hace exactamente lo opuesto, i.e., si $f : A \to B$ entonces $Ff : FB \to FA$.

Un endofunctor es un tipo especial de functor que mapea una categoría en sí misma, permitiendo estudiar transformaciones y estructuras internas dentro de la misma categoría. Estos resultan ser de suma importancia para definir el concepto de mónada.

Definicion 18 (Endofunctor)**.** Un functor que va de una categoría en si misma es llamado endofunctor, i.e., dada una categoría $\mathcal{C}$, el functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se llama endofunctor.

Veamos ahora un ejemplo de endofunctor

Ejemplo 19. En Set podemos definir el (endo)functor potencia $\mathcal{P}$: Set $\to$ Set cuyo mapeo de objetos envía un objeto X a su conjunto potencia $\mathcal{P}X$ y el mapeo de morfismos envía una función $f : X \to Y$ a su imagen directa $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$.

Para ilustrar el functor potencia en la categoría Set, consideremos dos conjuntos X y Y, cada uno con tres elementos, y una función entre ellos. Considermos los siguientes conjuntos:

$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}$$

Definamos una función $f : X \to Y$ como:

$$f(a) = 1$$

$$f(b) = 2$$

$$f(c) = 3$$

Ahora, aplicamos el functor potencia $\mathcal{P}$ a X y a Y. El functor potencia mapea cada conjunto a su conjunto potencia, es decir, el conjunto de todos sus subconjuntos.
El conjunto potencia de X es:

$$\mathcal{P}X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

El conjunto potencia de Y es:

$$\mathcal{P}Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

El functor potencia $\mathcal{P}$ también actúa sobre la función f. Dada una función $f : X \to Y$, el functor $\mathcal{P}$ mapea f a una función $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$, que se define por el mapeo de imágenes directas de subconjuntos. Es decir, para cada subconjunto $S \subseteq X$, $\mathcal{P}f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$.
Veamos algunos ejemplos de este mapeo:

- Para $S = \{a, b\} \subseteq X$, tenemos $\mathcal{P}f(\{a, b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{1, 2\}$.
- Para $S = \{b, c\} \subseteq X$, tenemos $\mathcal{P}f(\{b, c\}) = \{f(b), f(c)\} = \{2, 3\}$.
- Para $S = \{a\} \subseteq X$, tenemos $\mathcal{P}f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{1\}$.
- Para $S = \{a, b, c\} \subseteq X$, tenemos $\mathcal{P}f(\{a, b, c\}) = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{1, 2, 3\}$.

De manera más general, para cualquier subconjunto S de X, $\mathcal{P}f(S)$ es el conjunto de las imágenes de los elementos de S bajo la función f.
Entonces, la acción del functor potencia $\mathcal{P}$ sobre los conjuntos X y Y y la función f se puede resumir de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\mathcal{P}(f)(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$$

Este ejemplo muestra cómo el functor potencia opera tanto sobre conjuntos como sobre funciones entre conjuntos en la categoría Set.

3. Transformaciones Naturales

Las transformaciones naturales son fundamentales para el entendimiento de las relaciones entre functores en la teoría de categorías. No solo permiten comparar y conectar functores de manera coherente, sino que también facilitan la transferencia de estructuras y propiedades entre categorías de una manera sistemática. Estudiar transformaciones naturales es abrir la puerta a un lenguaje que proporciona una visión más profunda y cohesiva del pensamiento matemático.

Intuitivamente, podemos ver una transformación natural como una asignación que actúa de manera coherente entre functores: primero, asigna a cada objeto en la categoría de origen un morfismo en la categoría de destino, y segundo, lo hace de tal manera que estos morfismos respeten la estructura de los functores involucrados. En otras palabras, para cada objeto en la categoría de origen, la transformación natural asigna un morfismo que conecta las imágenes de ese objeto bajo los dos functores. Además, debe preservar ciertas propiedades importantes: para cada morfismo en la categoría de origen, la transformación natural garantiza que el diagrama correspondiente con las imágenes bajo los functores sea conmutativo.

Ahora hacemos formal la idea del párrafo anterior.

Definicion 20 (Transformación natural)**.** Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos functores. Una transformación natural $t : F \Rightarrow G$ es una familia de morfismos en $\mathcal{D}$ indexados por objetos A de $\mathcal{C}$:

$$\{t_A : FA \to GA\}_{A \in Ob(\mathcal{C})}$$

Tal que para todo $f : A \to B$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "t_A"'] & FB \arrow[d, "t_B"] \\
GA \arrow[r, "Gf"'] & GB
\end{tikzcd}$$

Con esta definición en mente, consideremos un ejemplo específico para ilustrar cómo funciona una transformación natural.

Ejemplo 21. Sea $\mathbf{1}$ el functor identidad en **Set** y sea $\times \circ \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle$ el functor que toma cada conjunto X a $X \times X$ y cada función f a $f \times f$. Entre esos dos functores hay una transformación natural

$$\Delta_X : X \to X \times X := x \mapsto (x, x)$$

La naturalidad equivale a afirmar que para cualquier función $f : X \to Y$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \arrow[d, "\Delta_Y"] \\
X \times X \arrow[r, "f \times f"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Llamamos a Δ transformación diagonal en Set. Esta es, de hecho, la única transformación natural entre estos functores.

Como se observa en el ejemplo, Δ asigna a cada conjunto X un morfismo Δ_X que lleva un elemento $x \in X$ al par $(x, x) \in X \times X$. La naturalidad asegura que al aplicar una función f a los elementos de X y luego tomar la diagonal del conjunto Y, el resultado es el mismo que si primero tomamos la diagonal de X y luego aplicamos la función $f \times f$.

4. Mónadas

Damos ahora uno de los objetos más bellos y utilizados de la teoría de categorías, las mónadas. Aunque popularizadas y usadas de forma extensa en computación teórica a raíz de los trabajos de Moggi [Mog91], las mónadas se originan de construcciones cohomológicas que buscaban relacionar functores.

Su uso extendido en la teoría computacional viene de su practicidad para dar una semántica a lenguajes de programación, así como efectos algebráicos, logrando modelar diversas características que pueden ser encontradas en procesos computables (e.g., comportamientos no determinísticos, probabilísticos, temporales, etc.)

Definicion 22 (Mónada)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera y T un endomorfismo en $\mathcal{C}$. Una *mónada* en $\mathcal{C}$ es una terna (T, η, μ) donde $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$ y $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ son transformaciones naturales, que llamaremos *unidad* y *multiplicación*, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, Rightarrow, "T\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, Rightarrow, "\eta T"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathbf{1}"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] & T \arrow[l, Rightarrow, "T\eta"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\mathbf{1}"] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

Aprovechando que hemos introducido ya al endofunctor del conjunto potencial $\mathcal{P}$ sobre la categoría Set, veamos por ejemplo una de las mónadas más ubicuas, la mónada del conjunto potencia.

Ejemplo 23. Ya hemos visto que $\mathcal{P} : \text{Set} \to \text{Set}$ es un endofunctor sobre Set, basta así mostrar a qué corresponde la unidad y la multiplicación bajo $\mathcal{P}$ para obtener una mónada $(\mathcal{P}, \eta, \mu)$, proponemos a la unión de conjuntos y el formar conjuntos unitarios, como la multiplicación y la unidad de nuestra mónada, respectivamente. Esto es, $\eta_X : X \to \mathcal{P}X$ actúa en un conjunto X como

$$X \mapsto \{X\} \in \mathcal{P}X$$

y $\mu_X : \mathcal{P}^2 X \to \mathcal{P}X$ actúa en un conjunto de subconjuntos de X como

$$S \subseteq \mathcal{P}^2 X \mapsto \bigcup_{A \in S} A \in \mathcal{P}X.$$

Tomando esta triada, $(\mathcal{P}, \{-\}, \bigcup)$, basta ahora con verificar que los dos diagramas de la definición de hecho conmutan, lo cual es un ejercicio de teoría de conjuntos.

5. Spans

Definition 24 (Span)**.** Dada una categoría $\mathcal{C}$, un span de X a Y es un diagrama con la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "s_x"'] \arrow[dr, "s_y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Donde S es el vértice, X y Y son el dominio y codominio respectivamente. Los morfismos s_x y s_y son las piernas izquierda y derecha respectivamente.

Los productos fibrados fueron definidos previamente y es en este momento en el que se ve la utilidad de estos. Resulta que cuando una categoría tiene productos fibrados, es posible componer spans en ella.

Definition 25 (Composición de spans)**.** Dados los siguientes spans

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "s_x"'] \arrow[dr, "s_y"] & & T \arrow[dl, "t_y"'] \arrow[dr, "t_z"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Podemos tomar el producto fibrado de $S \xrightarrow{s_y} Y \xleftarrow{t_y} T$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & & S \times_Y T \arrow[dl, "\pi_s"'] \arrow[dr, "\pi_t"] & & \\ & S \arrow[dl, "s_x"'] \arrow[dr, "s_y"] & & T \arrow[dl, "t_y"'] \arrow[dr, "t_z"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Luego, el span composición resulta ser

$$\begin{tikzcd} & S \times_Y T \arrow[dl, "s_x \circ \pi_s"'] \arrow[dr, "t_z \circ \pi_t"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

La teoría de categorías se encarga de estudiar objetos y relaciones entre ellos. Por eso no es extraño pensar en la idea de morfismos entre spans. La siguiente definición es una forma precisa de esta idea.

Definition 26 (2-morfismo entre spans)**.** Sean $X \xleftarrow{s_x} S \xrightarrow{s_y} Y$ y $X \xleftarrow{t_x} T \xrightarrow{t_y} Y$ dos spans en una categoría $\mathcal{C}$. Un mapeo entre ellos, usualmente llamado 2-morfismo, está dado por $f : S \to T$ en $\mathcal{C}$ y hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "s_x"'] \arrow[ddr, "s_y"] & \\ & T \arrow[dl, "t_x"] \arrow[dr, "t_y"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Los 2-morfismos permiten establecer una relación adicional entre spans, proporcionando una capa extra de estructura y facilitando la comparación entre diferentes spans. Veamos ahora un ejemplo de spans en la categoría Set

Example 27. Consideremos dos relaciones binarias $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, tomando las proyecciones a sus respectivos dominios y codominios obtenemos dos spans

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\pi_x"'] \arrow[dr, "\pi_y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\pi_y"'] \arrow[dr, "\pi_z"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Como Set es una categoría con productos fibrados podemos componer los dos spans para obtener

$$\begin{tikzcd} & R \times_Y S \arrow[dl, "\pi_x \circ \pi_R"'] \arrow[dr, "\pi_z \circ \pi_S"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Donde

$$\begin{aligned} R \times_Y S &= \{(r,s) \in R \times S : \pi_y(r) = \pi_y(s)\} \\ &= \{(r,s) = ((x,y),(y',s)) \in R \times S : \pi_y(x,y) = y = y' = \pi_y(x',y')\} \\ &= \{((x,y),(y,z)) \in R \times S\} \end{aligned}$$

Es decir, si hay algún $y \in Y$ que se comparta, entonces los elementos $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in S$ están relacionados entre si.
En este caso, la composición de los spans es la composición de relaciones binarias.
Además existe un 2-morfismo entre composiciones. Si tomamos el siguiente conjunto

$$R;S = \{(x,z) : \exists y (x,y) \in R, (y,z) \in S\}$$

Y definimos el morfismo $f : R \times_Y S \to R;S$ que realiza la asignación $((x,y),(y,z)) \mapsto$

(x, z), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& R \times_Y S \arrow[ddl, "\pi_x \times \pi_R"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddr, "\pi_z \times \pi_S"] & \\
& R; S \arrow[dl, "\pi_x"] \arrow[dr, "\pi_y"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Este ejemplo en la categoría Set ilustra cómo las relaciones binarias pueden ser vistas como spans y cómo la composición de estas relaciones corresponde a la composición de spans. Los 2-morfismos proporcionan una manera de pasar de la composición de spans a la composición usual de relaciones binarias.

6. Conclusiones

La teoría de categorías ofrece una perspectiva distinta de las matemáticas. Estudiar este tema durante estos meses ha sido una experiencia grata y enriquecedora. Este proyecto no solo se centró en los tecnicismos de una rama fundamental de las matemáticas modernas, sino que también se enfocó en comprender algunos de los conceptos más esenciales de esta disciplina.

El enfoque elegido para este proyecto siguió un orden similar al de las notas presentadas: estudiar definiciones y conceptos acompañados de ejemplos relevantes. Además, se dio gran importancia a la resolución de ejercicios y problemas variados que conectan los temas estudiados.

En estas notas se presenta una base sólida para adentrarse en el mundo de las categorías; no obstante, aún quedan muchos aspectos por explorar. Algunos temas de interés para futuros proyectos incluyen categorías restrictivas, mónadas restrictivas, categorías monoidales, y la correspondencia de Curry-Howard-Lambek, entre otros.

Referencias

[AT10] S. Abramsky y N. Tzevelekos. «Introduction to Categories and Categorical Logic». En: *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010, págs. 3-94. ISBN: 9783642128219. DOI: 10.1007/978-3-642-12821-9_1. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-12821-9_1.

[Awo10] S. Awodey. *Category Theory*. Oxford Logic Guides. OUP Oxford, 2010. ISBN: 9780191612558.

[Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. 2016. arXiv: 1612.09375 [math.CT] (vid. pág. 6).

[Mog91] Eugenio Moggi. «Notions of computation and monads». En: *Information and Computation* 93.1 (1991). Selections from 1989 IEEE Symposium on Logic in Computer Science, págs. 55-92. ISSN: 0890-5401. DOI: https://doi.org/10.1016/0890-5401(91)90052-4. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540191900524 (vid. pág. 10).